COLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

Fondée en 1949 — Reconnue par l'État
Diplôme visé par le Ministère de l'Éducation Nationale
1, Rue Bougainville — 75007 PARIS
TÉL. : 551 32-59

CONCOURS D'ADMISSION

SESSION DE 1984

MATHEMATIQUES - 2ème EPREUVE

DURÉE 2 H - COEFFICIENT 2

EXERCICE I

1°) Montrer que, quels que soient les réels a et b tels que $0 < a < b$:

$$\frac{1}{b}(b - a) \leq \int_a^b \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{a}(b - a)$$

2°) Montrer que pour tout entier $n > 0$:

$$\frac{1}{n+1} \leq \text{Log}(n+1) - \text{Log}\, n \leq \frac{1}{n}$$

3°) On pose, pour tout entier $n > 0$:

$$u_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$$

Déduire de 2°) que $\text{Log}(n+1) \leq u_n \leq 1 + \text{Log}\, n$.

La suite (u_n) est-elle convergente ?

4°) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \text{Log}\, n$ avec $n > 0$.

Démontrer que (v_n) est convergente, en vérifiant qu'elle est décroissante et minorée . (On ne demande pas de chercher sa limite).

5°) En s'inspirant des méthodes développées dans les questions précédentes, démontrer que la suite :

$$w_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

EXERCICE II

On rappelle qu'un polynôme est dit normalisé, si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1.

1°) Déterminer tous les polynômes normalisés du troisième degré et à coefficients complexes vérifiant la relation :

$$P(X).P(-X) + P(X^2) = 0$$

2°) On considère le polynôme :

$$Q(X) = X^3 + \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{7})X^2 - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{7})X - 1$$

Soit α l'une quelconque de ses racines. Montrer que $\beta = \alpha^2$ et $\gamma = \beta^2$ sont également des racines de $Q(X)$.

3°) Montrer que les trois nombres α , β et γ sont deux à deux distincts .

4°) Exprimer les racines de $Q(X)$ sous forme trigonométrique, en examinant leur produit et leur somme .

5°) Calculer les expressions suivantes :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \quad ; \quad \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \quad \text{et}$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma) \quad .$$

EXERCICE III

On considère la série double suivante :

Balance commerciale de la France 1980 CAF — FOB

Nomenclature pour les études conjoncturelles	Exportations FOB milliards de F	Importations CAF milliards de F
Produits de l'agriculture, sylviculture, pêche	35,04	32,08
Produits des industries agricoles et alimentaires	44,78	35,99
Produits énergétiques	18,81	150,53
Matières premières minérales	1,27	7,37
Métaux et produits du travail des métaux	63,62	65,05
Produits chimiques et demi-produits divers	70,14	70,80
Biens d'équipement professionnels	97,61	88,70
Biens d'équipement ménagers	5,48	11,04
Équipement automobile des ménages	30,24	15,56
Pièces détachées et matériels utilitaires de transport terrestre	11,44	18,07
Biens de consommation courante	65,34	71,80
Divers	4,10	1,92

Déterminer le coefficient de corrélation linéaire ainsi que les équations des droites de régression. Tracer le nuage de points et les droites sur le même graphique.

(On pourra éventuellement modifier les unités).